Varianta 41

Subiectul I

a) $P_{ABC} = 30$.
b) $m(\hat{B}) = 90^\circ$.
c) $S_{ABC} = 30$.
d) $\cos(B\hat{A}C) = \frac{5}{13}$.
e) Mijlocul M al segmentului $(BC) \Rightarrow M(-3, -3)$.
f) $a = 0$ **,** $b = -3$.

Subiectul II

1.
a) $n = 2$.
b) $x = 8$.
c) $V(0,0)$.
d) $4! - 3! = 18$.
e) $e = 3$.
2.
a) $f'(x) = 2 - 2x$.
b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -2$.
c) $V(1, 1)$ este punct de extrem local .
d) $f'(x) \ge 0$; $\forall x \in (-\infty, 1]$, deci funcția este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 1]$.
e) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{n^2} f(n)\right) = -1$.

Subiectul III

a) $(2X - 1)(2X^2 - 2X + 1) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1 = f$.
b) Câtul împărțirii este $2x^2 - 2x + 1$ și restul 0.
c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1+i}{2}$, $x_2 = \frac{1-i}{2}$ sau $x_3 = \frac{1}{2} \in \mathbf{R}$.
d) Din punctele **a)** și **c)** obținem $x_1 + x_2 = 1$ **și** $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$ **.**
e) $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{4}{4} = 1$.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}.$$

f) $P(n): 1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}, n\in \mathbf{N}^*$.

$P(1):\ 1=\dfrac{1\cdot 2}{2}$ - adevărat.

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k\in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $1+2+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Deci $P(k+1)$ este adevărată.

În baza inducției matematice $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}; \forall n\in \mathbf{N}^*$.

g) $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=$

$=4\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)-6\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+4(1+2+\ldots+n)-n=$

$=4\cdot\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}-6\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-n=n^4$.

Subiectul IV

a) $x^2\geq 0;\quad e^{-x}\geq 0;\forall x\in \mathbf{R}\Rightarrow x^2e^{-x}\geq 0,\forall x\in \mathbf{R}\ \Rightarrow f(x)\geq 0,\forall x\in \mathbf{R}$.

b) $f'(x)=2xe^{-x}+x^2e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow 2x-x^2=0\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow x=0;\ 2-x=0\Rightarrow x=2$.

Se constată că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0)$ și pe $(2,\infty)$ și crescătoare pe intervalul $[0,2]$. Rezultă că $x=0$ este punct de minim local și $x=2$ este punct de maxim local.

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0,\Rightarrow y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x}\left(2x-x^2\right)}{x^2\cdot e^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-x^2}{x^2}=-1$.

f) $I_n=\int_0^n f(x)dx=\int_0^n x^2e^{-x}dx=\int_0^n x^2\left(-e^{-x}\right)'dx=-x^2e^{-x}\Big|_0^n+\int_0^n 2xe^{-x}dx=$

$=-n^2e^{-n}-2xe^{-x}\Big|_0^n+\int_0^n 2e^{-x}dx=-e^{-n}\left(n^2+2n+2\right)+2$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{n^2+2n+2}{e^n}\right)=2$.